ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

№ 5 ЭНЕРГЕТИКА 2003

УДК 536.7

© 2003 г. ЦИРЛИН А.М., АНДРЕЕВ Д.А., МОГУТОВ В.А.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

В статье рассмотрена задача экономии энергии на термостатирование. Показано, что при прямой подаче тепла для любого закона теплопередачи следует подавать его только в термостатируемые помещения, а при использовании кондиционеров часть энергии следует подавать (отбирать) и в промежуточные помещения, температуры в которых не заданы.

Введение. Для поддержания заданного поля потенциалов (температур, концентраций, давлений и прочих) в открытой термодинамической системе необходимо подводить к этой системе потоки вещества и энергии. Если интенсивность таких управляемых потоков и точки их контакта с системой можно выбирать, возникает задача оптимального потенциалостатирования, т.е. поддержания заданного распределения потенциалов в открытой распределенной системе при минимальных затратах, оцениваемых тем или иным критерием. Если число управляемых потоков конечно, то с их помощью можно поддерживать заданные значения вектора интенсивных переменных лишь в конечном числе точек, и термодинамическую систему можно представить как совокупность систем с сосредоточенными параметрами, взаимодействующих друг с другом. Типичным и практически важным примером подобной системы является здание, состоящее их многих взаимосвязанных помещений, в некоторых из которых нужно поддерживать заданные значения температуры (в более общем случае влажности, концентрации воздушной среды и др.). Ниже с использованием результатов термодинамики при конечном времени решена задача оптимального термостатирования. Использованный метод может быть распространен и на общую задачу потенциалостатирования.

Энергосбережение в строительстве является одним из основных источников экономии энергии, так как около 40% энергии тратится на отопление и кондиционирование помещений [1]. Строительство энергосберегающих зданий [1] стало одним из главных направлений энергосбережения, достигаемого за счет целого ряда мероприятий: забор воздуха для вентиляции через подземный теплообменник, полная регенерация тепла выходящего воздуха, солнечные батареи на крыше здания, отопление с использованием тепловых насосов, многослойная и отражающая изоляция и пр. В результате энергопотребление таких зданий в пять-восемь раз меньше, чем для зданий обычной конструкции. Повышение стоимости энергии делает строительство энергосберегающих зданий весьма актуальным для России.

Одним из факторов энергосбережения – термостатирование помещений в энергосберегающем здании. Задача оптимального термостатирования состоит в том, чтобы поддерживать заданные температуры только в части помещений при произвольных температурах в остальных (промежуточных) помещениях, затрачивая при этом минимальное количество энергии. Как состав термостатируемых помещений, так и заданные значения температур могут изменяться от сезона и времени суток.

Подобная задача возникает в криогенной технике при поддержании низкой температуры в камере за счет отбора тепла с использованием холодильного цикла. В этом случае

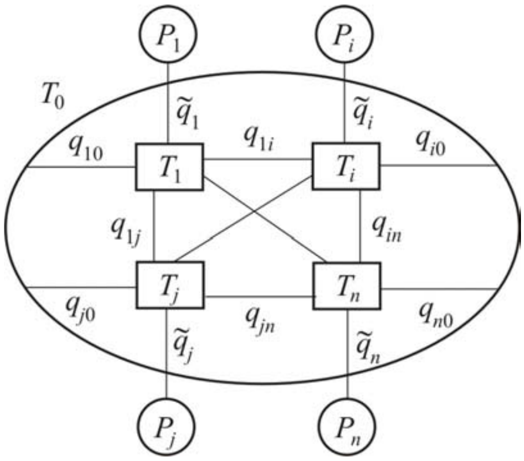

Рис.1. Общая расчетная схема здания.

для некоторых законов теплопереноса целесообразно использовать так называемую активную изоляцию, когда часть тепла отбирается из основной, а часть из промежуточных камер, в которых поддерживается температура более низкая, чем температура окружающей среды. Задача об активной изоляции рассмотрена в [2] для линейного закона теплопереноса и обратимых холодильных циклов, затем обобщена в [3] на случай необратимых циклов холодильных машин и в [4], где показано, для каких законов теплопередачи активная изоляция дает экономию энергии. Задача об активной изоляции представляет собой частный случай задачи термостатирования при последовательном соединении камер.

В этой работе авторы рассматривают задачу оптимального термостатирования в системе общей структуры с несколькими взаимосвязанными помещениями при двух вариантах подачи энергии.

A. Задача отопления (подача тепла за счет электрического, газового, водяного, воздушного обогрева).

B. Задача кондиционирования (обогрев или охлаждение помещений с использованием цикла теплового насоса или холодильного цикла).

Рассматриваемая структура изображена на рис.1, где обозначены: T_i – температура i-й камеры (i = 0, 1,… ,n), °C; $\alpha_{ij}(T_i, T_j)$ – коэффициенты теплопередачи между i-й и j-й камерами, которые могут зависеть от температур в этих камерах ($\alpha_{ji} = \alpha_{ij} \geq 0$), Вт/°C; $q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i, T_j)(T_j - T_i)$ – тепловой поток от i-й камеры к j-й, Вт; $q_{i0} = \alpha_{i0}(T_i, T_0)(T_0 - T_i)$ – тепловой поток от i-й камеры к окружающей среде с температурой T_0, Вт; $\tilde{q}_i$ – тепло, подаваемое (отбираемое) в i-ю камеру, Вт. Положительным считается направление потока тепла к камере.

Постановка задачи. Пусть температуры в m камерах T_1, …, T_m фиксированы ($m < n$), как и температура окружающей среды T_0. Требуется так выбрать потоки тепла $\tilde{q}_i$ (i = 1,…,n), чтобы для варианта A общее количество подводимого тепла, а для варианта B – общая мощность, затрачиваемая на привод тепловых и холодильных машин, были минимальны.

Минимизация затрат тепла на отопление. Запишем формальную постановку задачи для случая минимизации затрат тепла.

Критерий оптимальности

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \to \min, \tag{1}$$

при условиях теплового баланса для каждого помещения

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \qquad i = 1,...,n, \tag{2}$$

ограничениях на тепловые потоки

$$\tilde{q}_i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{3}$$

и условиях, наложенных на температуры термостатируемых помещений

$$T_i = \text{fix}, \qquad i = 0,\ldots,m. \tag{4}$$

Задачу (1)-(4) можно упростить, исключая условия (2) и записывая с их использованием критерий (1) как

$$I_A = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \to \min, \tag{5}$$

при условиях

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \leq 0, \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Переменными в этой задаче являются температуры промежуточных помещений T_i ($i = m+1,\ldots,n$).

Запишем функцию Лагранжа задачи (5), (6):

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j)(\lambda_i - 1). \tag{7}$$

По условиям теоремы Куна-Таккера получим условия оптимальности. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = (\lambda_i - 1)\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{ij}(T_i, T_j)}{\partial T_i} = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_i \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_i q_{ij}(T_i, T_j) = 0, \quad i = m+1,\ldots,n. \tag{9}$$

Условия дополняющей нежесткости (9) соответствуют тому, что $\lambda_i = 0$ для всех помещений, у которых $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$, и $\lambda_i > 0$, если $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) = 0$. Так как $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$ для помещений, в которые тепло подается ($\tilde{q}_i > 0$), $\frac{\partial q_{ij}}{\partial T_i} < 0$ для всех j, то из условий (8), (9) следует, что тепло должно подводиться лишь к тем помещениям, температуры в которых заданы. При этом оптимальные потоки тепла $\tilde{q}_i$ ($i = 1,\ldots,m$) и температуры в промежуточных помещениях T_i ($i = m+1,\ldots,n$) однозначно определяются уравнениями тепловых балансов (2), которые примут вид

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \qquad i = 1,\ldots,m; \tag{10}$$

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) = 0, \qquad i = m+1,\ldots,n; \tag{11}$$

$$T_i = \text{fix}, \qquad i = 0,\ldots,m. \tag{12}$$

Для ньютоновских законов теплопереноса значения α_{ij} постоянны и задача (4)-(6) становится задачей линеного программирования, а условия (10), (11) превращаются в систему линейных уравнений, размерность которой равна $(n-m)$. Решение $(n-m)$ уравнений (11) определяет величины вектора потоков $\tilde{q}_i$. Если один из потоков $\tilde{q}_i$ окажется отрицательным, то для данных коэффициентов теплопередачи для отопления следует использовать кондиционеры.

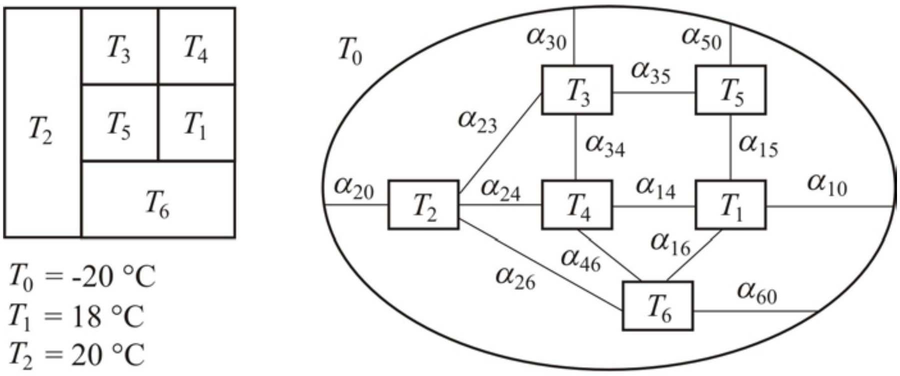

Рис.2. План и расчетная схема здания.

T_0 = -20 °C
T_1 = 18 °C
T_2 = 20 °C
T_3, T_4, T_5, T_6 - ?
$\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ - ?

П р и м е р. Рассмотрим здание, план которого и соответствующая ему расчетная схема приведены на рис.2. Температура окружающей среды T_0 и температуры в первом T_1 и втором T_2 помещениях заданы и равны -20°C, 18°C и 20°C соответственно. Коэффициенты теплопередачи между помещениями и окружающей средой приведены в таблице. Требуется найти количества подводимого тепла $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ и температуры $T_3,\ldots,T_6$ в остальных помещениях.

Значения коэффициентов теплопередачи α_{ij}, Вт/°C

j \ i	0	1	2	3	4	5	6
0	-	16,8	84	16,8	0	33,6	50,4
1	16,8	-	0	0	33,6	33,6	33,6
2	84	0	-	33,6	33,6	0	33,6
3	16,8	0	33,6	-	33,6	33,6	0
4	0	33,6	33,6	33,6	-	0	33,6
5	33,6	33,6	0	33,6	0	-	0
6	50,4	33,6	33,6	0	33,6	0	-

Считая тепловые потоки пропорциональными разности температур ($q_{ij} = \alpha_{ij}(T_j - T_i)$) запишем (4)-(6) в виде задачи линейного программирования

$$I_A = -\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij}(T_j - T_i) \to \min; \qquad (13)$$

$$\sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij}(T_j - T_i) \le 0, \qquad i = 1,\ldots,6; \qquad (14)$$

$$T_i = \text{fix}, \qquad i = 0, 1, 2. \qquad (15)$$

Подставим данные таблицы в (13) и перепишем это выражение с точностью до константы в виде

$$I_A = 16{,}8 \cdot T_3 + 33{,}6 \cdot T_5 + 50{,}4 \cdot T_6 \to \min_{T_3,\ldots,T_6}. \qquad (16)$$

Оптимальное решение определяется условиями (10), (11), которые примут вид

$$\begin{cases} 33{,}6\cdot T_4 + 33{,}6\cdot T_5 + 33{,}6\cdot T_6 - 2452{,}8 + \tilde{q}_1 = 0; \\ 33{,}6\cdot T_3 + 33{,}6\cdot T_4 + 33{,}6\cdot T_6 - 5376 + \tilde{q}_2 = 0; \\ -117{,}6\cdot T_3 + 33{,}6\cdot T_4 + 33{,}6\cdot T_5 + 336 = 0; \\ 33{,}6\cdot T_3 - 134{,}4\cdot T_4 + 33{,}6\cdot T_6 + 1276{,}8 = 0; \\ 33{,}6\cdot T_3 - 100{,}8\cdot T_5 - 67{,}2 = 0; \\ 33{,}6\cdot T_4 - 151{,}2\cdot T_6 + 268{,}8 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$T_0 = -20°\mathrm{C}, \qquad T_1 = 18°\mathrm{C}, \qquad T_2 = 20°\mathrm{C}. \quad (18)$$

Решая систему (17), (18), получим следующие результаты

$\tilde{q}_1$ = 1832 Вт; $\tilde{q}_2$ = 4579 Вт;

T_3 = 6,8°C, T_4 = 12,3°C, T_5 = 1,6°C, $T6$ = 4,5°C.

Минимальные затраты тепла I_A^* равны

I_A^* = 1832 + 4579 = 6411 Вт.

Минимизация затрат энергии при использовании тепловых насосов (задача кондиционирования). Системы кондиционирования все шире используются для поддержания заданной температуры в помещениях, а для стран с жарким климатом – это один из основных потребителей энергии.

Задача о минимуме суммарных затрат энергии при кондиционировании имеет вид

$$I_B = \sum_{i=1}^{n} P_i \to \min, \quad (19)$$

при условиях (2), (4).

Обозначим через r_i ($r_i = \tilde{q}_i / P_i$) отопительные коэффициенты тепловых насосов, которые зависят от их конструкции (коэффициентов теплопередаче в нагревателе и холодильнике K_0 и K_i), формы цикла, температур на холодной и горячей стороне цикла T_0 и T_i и от подводимой мощности P_i. Обратимая оценка отопительного коэффициента теплового насоса не зависит от P_i.

$$r_i^0 = \frac{T_i}{T_i - T_0}. \quad (20)$$

Здесь и далее температуры измеряются в градусах Кельвина.

Оценка для отопительного коэффициента теплового насоса и холодильного коэффициента обратного цикла с учетом необратимости процесса теплопереноса получена в [5], [6]. Для ньютоновского закона теплообмена воздуха с рабочим телом, температура которого $T_{\text{рт}}$, $q = K(T - T_{\text{рт}})$ с коэффициентами $K = K_0$ при отборе тепла от окружающей среды и $K = K_i$ при передаче тепла в помещение, эта оценка имеет вид

$$r_i(T_0, T_i, P_i) = 1 + \frac{1}{2P_i}\left[\sqrt{P_i^2 + \frac{\overline{K}_i(T_i + T_0)}{2}P_i + \frac{\overline{K}_i^2(T_i - T_0)^2}{16}} - P_i - \frac{\overline{K}_i(T_i - T_0)}{4}\right], \quad (21)$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\overline{K}_i = \dfrac{4K_iK_0}{\left(\sqrt{K_i} + \sqrt{K_0}\right)^2}$ – эквивалентный коэффициент теплопередачи.

Условия (2) перепишем в форме

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + P_i r_i(T_0, T_i, P_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \quad (22)$$

Искомыми переменными в задаче (19), (22), (4) являются подводимые мощности $P_i \geq 0$ ($i = 1,...,n$) и температуры промежуточных камер T_i ($i = m+1,...,n$). Если в уравнениях (22) $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$, то кондиционер для i-го помещения работает как тепловой насос и r_i имеет вид (21). Если $\sum_{j=0}^{n} q_{ij} > 0$, то кондиционер работает как охладитель, причем температура $T_i < T_0$. В этом случае холодильный коэффициент обратимого цикла

$$\tilde{r}_i^{\,0} = \frac{T_i}{T_0 - T_i} = r_i^0 - 1.$$

Для необратимого цикла в условиях (22) и вытекающих из них соотношениях вместо $r_i(T_0, T_i, P_i)$ фигурирует

$$\tilde{r}_i = r_i(T_i, T_0, P_i) - 1. \tag{23}$$

Отметим, что в (23) температуры T_0 и T_i в r_i следует поменять местами. Равенство (23) вытекает из известной связи между холодильным коэффициентом обратного цикла и отопительным коэффициентом теплового насоса [6].

Условия оптимальности задачи (19), (22), (4), сформулированные через ее функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ P_i \left[1 + \lambda_i r_i(T_0, T_i, P_i) \right] + \lambda_i \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \right\},$$

приводят к соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow r_i(T_0, T_i, P_i) + P_i \frac{\partial r_i}{\partial P_i} = -\frac{1}{\lambda_i}, \qquad i = 1,...,n; \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_\nu} = 0 \Rightarrow P_\nu \lambda_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial T_\nu} + \lambda_\nu \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} = 0, \qquad \nu = m+1,...,n, \tag{25}$$

которые вместе с условиями (21)-(23) определяют искомые переменные.

При использовании обратимой оценки отопительного (холодильного) коэффициента задача упрощается и система (22), (24), (25) приводит к уравнениям

$$P_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j), \qquad i = 1,...,n; \tag{26}$$

$$\lambda_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i}, \qquad i = 1,...,n; \tag{27}$$

$$\lambda_\nu \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} - P_\nu \lambda_\nu \frac{T_0}{(T_\nu - T_0)^2} = 0, \qquad \nu = m+1,...,n. \tag{28}$$

Откуда для температур промежуточных камер имеем

$$\frac{T_\nu - T_0}{T_\nu} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}} \frac{T_i - T_0}{T_i} \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} + \frac{T_0}{T_\nu^2} \sum_{j=0}^{n} q_{\nu j}(T_\nu, T_j) = 0, \qquad \nu = m+1,...,n. \tag{29}$$

Эта система позволяет найти все температуры, так как для $i \leq m$ их значения заданы (см.(12)). После этого из условий (26) могут быть найдены оптимальные значения мощностей P_i для всех i от 1 до n.

П р и м е р. Рассмотрим здание, план которого и соответствующая расчетная схема приведены на рис.3. Температуры T_0 и T_1 равны соответственно 253 K и 293 K; коэффициенты теплопередачи в тепловых насосах $K_0 = K_1 = K_2 = 3000$ Вт/K; коэффициенты теплопередачи между помещениями $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 180$ Вт/К и окружающей средой $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 94{,}08$ Вт/К. Требуется найти температуру T_2 во втором помещении и мощности P_1, P_2, затрачиваемые на привод тепловых насосов. Тепловые потоки считаются пропорциональными разности температур ($q_{ij} = \alpha_{ij}(T_j - T_i)$), а процесс теплопереноса необратимым.

Задача (19), (22), (4) о минимуме затрат энергии на привод тепловых насосов запишется в виде

$$I_B = P_1 + P_2 \to \min; \tag{30}$$

$$\begin{cases} \alpha_{10}(T_0 - T_1) + \alpha_{12}(T_2 - T_1) + P_1 r_1(T_0, T_1, P_1) = 0; \\ \alpha_{20}(T_0 - T_2) + \alpha_{21}(T_1 - T_2) + P_2 r_2(T_0, T_2, P_2) = 0; \end{cases} \tag{31}$$

$$T_0 = 253 \text{ K}; \qquad T_1 = 293 \text{ K}, \tag{32}$$

где r_1 и r_2 имеют вид (21).

Выражая P_1 и P_2 через T_2 в системе (31) и учитывая заданные значения величин, а также (21), после преобразований, выполненных с использованием пакета MathCad, получим систему

$$\begin{cases} P_1(T_2) = 1{,}6 \dfrac{848560349 - 446890 \cdot T_2 + 5625 \cdot T_2^2}{76737 - 50 \cdot T_2}; \\ P_2(T_2) = 0{,}48 \dfrac{2436457 \cdot T_2^2 - 1313982242 \cdot T_2 + 176932331113}{4267 \cdot T_2 - 318926}. \end{cases} \tag{33}$$

Теперь критерий оптимальности I_B зависит только от температуры T_2 и, как показывают расчеты, достигает минимума при температуре $T_2 = 282$ К.

Подставляя найденную температуру T_2 в систему (33), находим затраты энергии на привод тепловых насосов $P_1 = 910{,}36$ Вт и $P_2 = 79{,}32$ Вт.

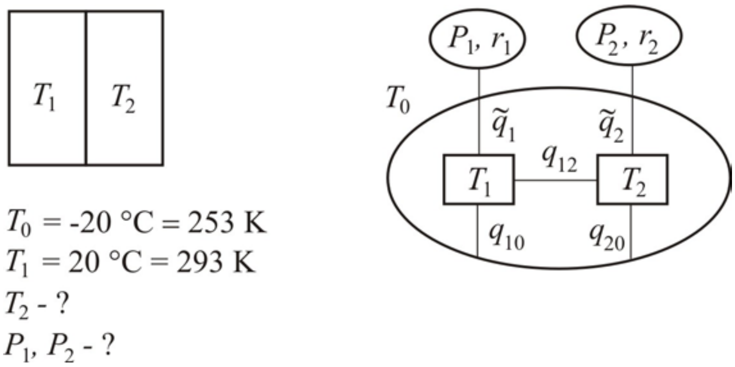

Рис.3. План и расчетная схема здания.

Выводы. 1. Для произвольного закона теплопереноса при обогреве здания за счет прямой подачи тепла (электрообогрев, подача горячей воды или воздуха, газовый обогрев) его целесообразно подавать только в помещения с фиксированной температурой в количествах, определяемых решением задачи (1)-(4). Температуры в промежуточных помещениях определяются условиями теплообмена.

2. При кондиционировании здания целезообразно часть энергии тратить на промежуточные помещения, поддерживая в них некоторые оптимальные температуры, определяемые решением задачи (19), (22), (4).

3. Полученные соотношения позволяют оценить затраты энергии на термостатирование и построить систему оперативного перераспределения потоков энергии, минимизирующую эти затраты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feist W.* Passivhaus – ein neuer Standard mit hohem entwicklung spotential // Energie Effizientes Bauen. 2000. № 1.
2. *Мартыновский В.С.* Циклы, схемы и характеристики теплотрансформаторов. М.: Энергия, 1979.
3. *Софиев М.А.* К расчету активной тепловой изоляции // Теор. основы хим. технологии. 1988. № 3.
4. *Tsirlin A.M., Sofiev M.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting // J. Phys. D: Appl. Phys. 1998. V.31. № 18.
5. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 1-3.
6. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. М.: Химия, 2000.

Москва
Переславль-Залесский

Поступила в редакцию
23.IV.2002